

**А. С. МАЗМАНИШВИЛИ**, д-р физ.-мат. наук, профессор НТУ «ХПИ»,  
**О. Я. НИКОНОВ**, канд. техн. наук, доцент НТУ «ХПИ»

## **СТОХАСТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ ТРАНСПОРТНОГО СРЕДСТВА В УСЛОВИЯХ ДРОБОВОГО И БЕЛОГО ШУМА**

В статті розглянута часова еволюція транспортної ланки, що описується диференціальним рівнянням зі збурюючою дією в правій частині. В якості збурення використані завади двох видів: білий шум та дробовий шум, енергетичні параметри яких узгоджені. Приведено часові епюри обох завад та результати чисельного моделювання, що основані на методі Ейлера. Зроблено висновки про еквівалентність «в середньому» поведінки ланки, зіставлені відповідні стаціонарні області.

В статье рассматривается временная эволюция транспортного звена, описываемая дифференциальным уравнением с возмущающим воздействием в правой части. В качестве возмущения использованы помехи двух видов: белый шум и дробовой шум, энергетические параметры которых согласованы. Приведены временные эпюры обоих шумов и результаты численного моделирования, основанные на методе Эйлера. Сделаны выводы об эквивалентности «в среднем» поведения звена, сопоставлены соответствующие стационарные области.

In the article time evolution transport element, described by the differential equation with the outrage influence in the right of part, is considered. As outraging are used hindrances of two types: white noise and shot noise, which energy parameters are coordinated. Brought time epures both noises and results numerical modeling, based on the Euler's method. Conclusions about statistical equivalence «in average» behaviours element are made, corresponding stationary areas are match.

**Введение.** Опыт эксплуатации автоматических устройств и систем показывает, что средства автоматизации, установленные на транспортных средствах и других машинах, эффективны, когда их элементы правильно настроены [1, 2]. Эффективным подходом проектирования транспортных средств является моделирование динамических процессов в режиме реального времени [3, 4]. Необходимо отметить, что само моделирование необходимо осуществлять с учетом реальных свойств среды, что особенно важно для специальных транспортных средств высокой проходимости. При численном моделировании, как правило, в качестве возмущающего фактора, ассоциируемого со свойствами профиля, применяется стохастическое моделирование, основанное на использовании процесса «белого» шума [5, 6, 7]. Профиль пересеченной местности, по которой движутся специальные транспортные средства, содержит такие препятствия, как ямы, рвы, бревна, элементы железобетонных конструкций и т.п. Для описания профилей такого рода в транспортных задачах численного моделирования необходимо применение стохастических процессов, свойства которых приближены к указанным возмущениям, а значит, отличными от свойств белого шума. Известный процесс «дробового» шума [8, 9, 10], как представляется, может быть использован в указанных задачах.

**Цель работы.** Целью настоящей работы является проведение численного моделирования транспортной задачи с применением стохастических шумов обоих указанных видов (дробового и белого) и последующим сравнением результатов.

**Постановка задачи.** Для упругих колебаний корпуса транспортного средства математическая модель возмущенного движения может быть записана в виде системы линейных дифференциальных уравнений. Пользуясь обозначениями, приведенными в [6, 7], запишем следствие из этой системы в форме дифференциального уравнения для формирующего динамического звена

$$T_1^2 \frac{d^2 u(t)}{dt^2} + T_2 \frac{du(t)}{dt} + u(t) = k \xi(t). \quad (1)$$

Дифференциальное уравнение (1) моделирует случайную функцию  $u(t)$ , порожденную возмущением  $\xi(t)$  в правой части.

В настоящей работе проведено моделирование временной эволюции решения уравнения (1) и сопоставление его результатов для обоих видов шума. Параметры звена выбирались следующие:  $T_1^2 = 0.20 \text{ с}^2$ ;  $T_2 = 0.12 \text{ с}$ ;  $k = 0.225$  [7].

В уравнении (1) в качестве возмущающей функции  $\xi(t)$  может быть использована помеха рассматриваемого типа. Обычно [3, 4] в качестве помехи применяется случайная функция типа «белого» шума. Именно шум такого рода наиболее часто используется в задачах стохастического моделирования. В настоящей работе на известном примере [4] в качестве шума использована помеха типа «дробового» шума [8, 9, 10].

Система дифференциальных уравнений (1) может быть записана в стандартном виде Коши:

$$\frac{d}{dt} X = AX + b \xi(t). \quad (2)$$

В этом уравнении введены следующие обозначения, которые вытекают из (1):

$X = (\dot{u}(t), u(t))^T$  – вектор состояния системы (решение уравнения (2));

$\xi(t)$  – возмущающее воздействие вида дробового шума или белого шума в правой части системы;

$A$  – матрица системы;

$b$  – вектор коэффициентов правой части системы уравнений.

Для выбранных параметров звена имеем

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -25 & -3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 5.625 \end{pmatrix}.$$

**Дробовой и белый шумы.** Рассмотрим теперь систему (2) с правой частью – дробовым  $\xi_S(t)$  шумом или белым  $\xi_W(t)$  шумом. Приведем значения используемых при моделировании параметров:

$\sigma_S$  – среднеквадратичные амплитуды импульсов дробового шума;

$\tau$  – средний временной интервал между импульсами;

$K$  – количество импульсов дробового шума, используемое при моделировании (удобно значение параметра  $K$  выбирать так, чтобы изучить эволюцию системы за временной интервал, равный 100 с);

$\sigma_W$  – среднеквадратичные амплитуды импульсов белого шума;

$N$  – количество импульсов белого шума.

При получении численного решения уравнения (2) был выбран одношаговый метод Эйлера решения дифференциального уравнения. Известные другие методы (например, метод Рунге-Кутты) оказались неприменимыми в рассматриваемой стохастической модели, поскольку их алгоритмы содержат многократный вызов правой части уравнения, что приводит к нарушению энергетического баланса между шумами рассматриваемых видов и потому противоречит самому уравнению (2).

При численной реализации необходимо выбрать шаг  $h$  численного интегрирования рассматриваемых дифференциальных уравнений или, что эквивалентно, общее количество шагов  $N$  на временном интервале решения. Для всего интервала в 100 с оказалось достаточным выбрать  $h=0.002$  с, т.е. всего количество  $N$  шагов интегрирующего алгоритма составило  $N=50000$ . Таким образом, фактически в качестве белого шума был применен высокочастотный «решетчатый» шум.

*Дробовой шум*  $\xi_S(t)$  задается [9, 10] как последовательность дельтаобразных импульсов ( $k = 1, 2, 3, \dots$ )

$$\xi_S(t) = \sum_k a_k \delta(t - t_k), \quad (3)$$

обладающими следующими свойствами:

а) каждая амплитуда  $a_k$  независимо от остальных амплитуд из набора  $\{a_k\}$  подчиняется нормальному закону Гаусса с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной  $\sigma_S^2$ ;

б) каждый из временных интервалов  $\tau_k = t_k - t_{k-1}$  между последовательными ударами ( $k = 1, 2, 3, \dots$ ) является независимой случайной величиной и подчиняется экспоненциальному закону с параметром (средним

интервалом)  $\tau$ , который согласован с общим количеством ударов на всем временном промежутке.

Белый шум  $\xi_w(t)$  рассматривается как предел последовательности дробовых шумов  $\{\xi_s(t)\}$ , у которых количество ударов  $K$  растёт, а интенсивность этих ударов  $\sigma_s^2$  уменьшается таким образом, что средняя энергия за выбранный промежуток времени остается неизменной.

Для обеспечения энергетической эквивалентности примем, что энергии возмущающих воздействий на всем временной интервале поиска решения совпадают. Таким образом, имеем

$$K\sigma_s^2 = N\sigma_w^2, \quad (4)$$

поэтому если заданы три величины, то из (4) можно найти значение четвертой.

**Результаты численного моделирования.** Ниже приведены результаты численного моделирования системы (2) с воздействием в виде дробового или белого шума. На всех приводимых рисунках результаты изложены парами, при этом везде левый рисунок относится к случаю дробового шума, а правый – к случаю белого шума. Для удобства расчетов везде было принято значение  $\sigma_s=1$ . Количество ударов дробового шума было выбрано  $K=50$ , т.е. в среднем 1 удар за две секунды. Это дает для среднеквадратичной амплитуды белого шума значение  $\sigma_w=0,032$ .

На рис. 1 приведены временные эюры используемых шумов  $\xi_s(t)$  и  $\xi_w(t)$ . На левом из них хорошо видна «ударная» структура дробового шума. Количество импульсов в среднем составляет 50, хотя при практической реализации их число на интервале расчета может отличаться от среднего в допустимых статистических пределах. Число импульсов  $N$  белого (решетчатого) шума велико, поэтому справа на рис. 1 практически видна сплошная полоса с относительно небольшими выбросами.

На рис. 2 приведены зависимости колебаний звена под воздействием дробового шума (слева) и белого шума (справа). Обращает на себя внимание резкое различие типов движения.

На рис. 3 приведены аналогичные зависимости, но для скорости колебаний звена.

На рис. 4 приведены фазовые карты амплитуд колебаний звена под воздействием дробового шума (слева) и белого шума (справа). Видна реакция системы на удары, как дробового шума, так и белого. На фазовой карте слева видно, что удары дробового шума, в основном, следуют регулярно с интервалом (2 с), разброс обусловлен стохастичностью шума.

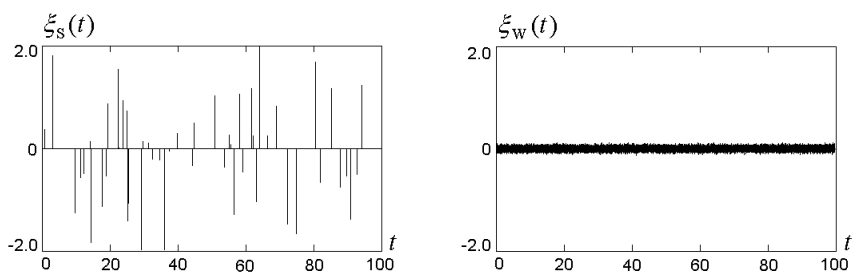


Рисунок 1 – Реализации дробового шума (слева) и белого шума (справа)

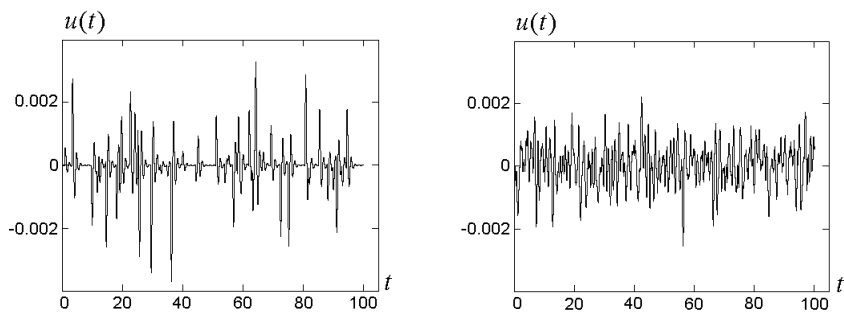


Рисунок 2 – Реализация колебаний звена

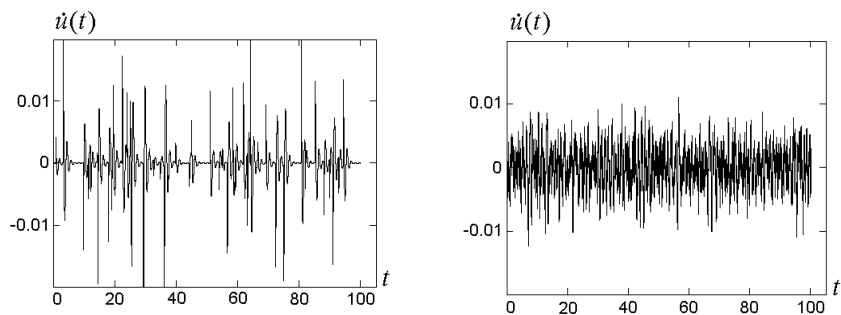


Рисунок 3 – Реализация скорости колебаний звена

Аналогичные приведенным зависимости были получены в ряде численных экспериментов, в ходе которых увеличивалось число шагов  $N$  численного алгоритма и связанного с этим число  $N$  возмущений белого шума.

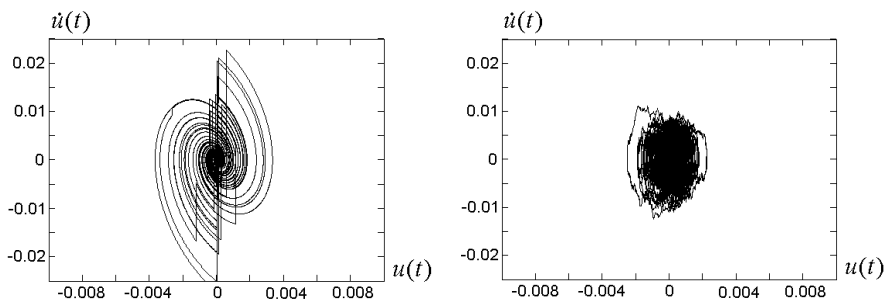


Рисунок 4 – Фазовые карты колебаний координаты и скорости звена под воздействием дробового шума (слева) и белого шума (справа)

**Заключення.** Из приведенных на рис. 2-4 зависимостей видна картина временной эволюции системы. А именно, компоненты вектора состояния, изменяясь под воздействием импульсов дробового шума, в основном, находятся в окрестности равновесной нулевой точки. Такого рода поведение системы определяется большим значением декремента системы и малого времени затухания. В основном, система находится в стационарной области. Указанные свойства системы оказываются совпадающими для шумов обоих видов. Близкими оказались и размеры стационарных областей. Все эти свойства позволяют говорить о возможности и целесообразности выполнения моделирующих экспериментов в стохастических системах [11] с применением дробового шума.

**Список литературы:** 1. Александров Е. Е., Богаенко И. Н., Кузнецов Б. И. Параметрический синтез систем стабилизации танкового вооружения.– К.: Техніка, 1997.– 112 с. 2. Александров Е. Е., Волонцевич Д. О., Карпенко В. А. Динамика транспортно-тяговых колесных и гусеничных машин.– Харьков: ХГАДТУ, 2001.– 642 с. 3. Александров Е. С., Кюрчев В. Н. О возмущениях, действующих на пушку при движении танка по пересеченной местности // Механіка та машинобудування.– 2002.– № 1.– С. 93–96. 4. Александров Е. Е., Борисюк М. Д., Кузнецов Б. И. Параметрическая оптимизация многоканальных систем автоматического управления.– Харьков: Основа, 1995.– 272 с. 5. Александров Е. С., Кечев М. О., Никонов О. Я. Основи автоматизації і танкові автоматичні системи.– Харків: Харківський інститут танкових військ, 2002.– 163 с. 6. Александров Е. Е., Костенко Ю. Т., Кузнецов Б. И. Оптимизация многоканальных систем управления.– Харьков: Основа, 1996.– 288 с. 7. Александров Е. С., Никонов О. Я., Олиарник Б. А. Танковая пушка с упругим стволом как объект стабилизации // Артиллерийское и стрелковое вооружение.– 2005.– № 2.– С. 44–47. 8. Александров Е. Е., Вирченко Ю. П., Мазманишвили А. С. К задаче АКОР при воздействии на объект управления дробового шума // Республиканский межведомственный сборник «АСУ и приборы автоматики».– 1992, вып. 97, Харьков.– С. 93–96. 9. Гнеденко Б. В., Коваленко И. Н. Введение в теорию массового обслуживания.– М.: Наука, 1987.– 336 с. 10. Гихман И. Н., Скороход А. В. Теория случайных процессов.– Т. III.– М.: Наука, 1971.– 496 с. 11. Александров Е. С., Козлов Е. П., Кузнецов Б. И. Автоматичне керування рухомими об'єктами і технологічними процесами.– Т. I. Теорія автоматичного керування.– Харків: НТУ «ХПІ», 2002.– 490 с.

Поступила в редколлегию 21.11.07